MICHAELIS ANGELI RICCII GEOMETRICA EXERCITATIO.

ROMÆ, Apud Nicolaum Angelum Tinassium M.DC.LXVI.

Superiorum permissu:

ABBATI
STEPHANO GRADIO
MICHAEL ANGELVS RICCIVS S.P.D.

SCRIPTIONEM hanc meam argumenti, vt vides, inter Mathematica difficillimi, ſed æquè ad difficiliora quæque problematum efficienda, & obſcuriora Theorematum cognoſcenda vtiliſſimi, cùm in Geometrico, tùm in Analytico puluere; ad te mittendam duxi, vir ornatiſſime, STEPHANE GRADI, *quem ego vnum omnium huius Ciuitatis plurimi facio, ob egregias animi laudes, præſertim verò propter acre his de rebus exiſtimandi iudicium, quotidianis grauiſſimarum inter nos diſputationum experimentis mihi perſpectum & cognitum. Lege quæſo illam diligenter, & vbi diù exactiſſimæ tuæ cenſuræ ſubiectam habueris, ecquid reſpondeat ſolitæ tuæ de meis hoc in genere cogitationibus, opinioni, pronuncia. Nam ſi hoc aſſequar, vt tibi cæteriſque Amicis earundem Diſciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in poſterum quam ob rem humaniſſimis tuis hortationibus oblucter, cum autor mihi eſſe perſeuerabis edendi alia quæ tecum iampridem communicaui, de præceptis vniuerſæ Artis analyticæ, geometrica methodo breuiter & expeditè demonſtratis, vna cùm animaduerſione erratorum quæ in ipſis tradendis magni nominis Auctores erraſſe deprehendi; faciliùſq; obtinebis ne diutiùs premam apud me quæcumque de Geometria in genere diſputata & literis conſignata in certas propoſitiones redegi; & ex his illam præcipuè à Torricellio, & à te quoq; tantopere commendatam, quæ integram doctrinam triginta propoſitionum Archimedis, Lucæ Valerij, & aliorum, vna complectitur; duaſque præterea, qui-*

bus totam penè Io. Caroli de la Faille de centro grauitatis partium circuli & ellipseos doctrinam [iusto volumine ab ipso explicatam] absoluo. Statui autem pauca aliquot huius scripti exemplaria typis imprimere, quò commodiùs possint ad peritos huiusmodi scientiarum Amicos, tùm per Italiam, tùm exteras apud gentes peruenire, accenso potiùs ea in re tuo studio obsecutus, quàm ingenio meo. Neque enim is ego sum, cui nomen famæ per ambitionem ingerere libeat; aut quem non magis indagatæ veritatis cognitio, quam cognitæ ostentatio delectet. Interim hunc amicitiæ nostræ iampridem institutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli intermissæ, fructum iucundissimum feram, vt quæ hac in re de me sentis amicè, hoc est [vt Euripidi placet] liberè, te loquentem audiam; eoque, quid cæteri & sentiant & loquantur securus fiam. Vale. Romæ octauo Idus Iulij 1666.

DEFINITIONES.

1 POteſtatem quamlibet, eiuſque radicem, voco, dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, vt A 2, in, B 3, fiet productum A 2 in B 3; cui producto illud ſimile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypotheſi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, ſimile eſt producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta ſunt quæ ad eundem gradum pertinent; vt duo rectangula, quippè quæ ad ſecundum gradum pertinent; & duo ſolida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros ſeu æquales ſeu inæquales, vel numerum & vnitatem, vel duas vnitates. Terminos inæquales appello duos numeros inæquales, vel numerum & vnitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas vnitates.

5 Productum in linea fieri ſecundum terminos datos, aut poſitos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes ſunt ipſi termini dati vel poſiti; radices verò ſegmenta illius rectæ lineæ ſectæ in proportione terminorum eorumdem.

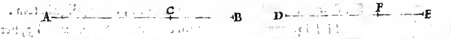
Sit verbi cauſa, quæpiam recta linea, cuius maius ſegmentum ad minus ſit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo ſegmenti maioris in quadratum minoris erit factum in linea data ſecundum terminos poſitos 3, & 2; quia ſegmenta quæ ſunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum ſunt etiam 3, & 2.

Rurſus eſto quemadmodum ſegmentum maius ad minus eiuſdem lineæ, ſic 3 ad 1, productum ex cubo maioris ſegmenti in ſegmentum ipſum minus, erit productum in linea factum ſecundum terminos poſitos, numerum & vnitatem. Ita, A 3 in B 1 [ſi A vocetur maius ſegmentum, B verò, minus] eſt productum factum in linea A + B ſecundum terminos 3, & vnitatem, quia radices A & B ſic ſunt, vt eſt numerus 3 ad vnitatem; & dignitatis A 3 exponens eſt, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens eſt, vnitas, item data.

Lemma primum.

SI duæ rectæ in eadem ratione ſecentur, producta ſimilia facta ex ſegmẽtis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fient ex totis.

Sint



Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F ita sectæ, vt quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum segmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ sunt similia per secundam definitionem; iisque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5 per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in F E 3 ad D E 5. Quia rationes ex quibus ratio producti A C 2 in C B 3 ad AB 5 componitur, eædem sunt ac componentes rationem producti D F 2 in F E 3 ad D E 5; ob sectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, &c.

Lemma secundum.

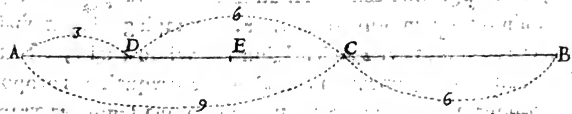
Isdem positis, Dico, si A C 2 in C B 3 fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ D E, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex segmentis rectæ D E alia respondent orta ex segmentis rectæ A B in eadem proportione sectæ; & illa ad homogeneum suum D E 5 eandem rationem habent, atque ista ad suum A B 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem A C 2 in C B 3 ad A B 5, ex hypothesi, est eadem, ac ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5: cæterorum verò productorum ex segmentis ipsius D E ad D E 5, eadem est atque ratio productorum sibi respondentium, quæ fiunt ex segmentis rectæ A B, ad A B 5. Cùm igitur ratio A C 2 in C B 3 [quod maximum esse ponitur] ad A B 5 sit maior, per octauam quinti Elem., ratione ceterorum productorum sibi similium ad A B 5; maior etiam erit ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5, quàm ratio ceterorum similium productorum ex segmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipsum D F 2 in F E 3 per decimā quinti Elem. est maximum. Quod, &c.

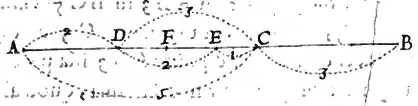
Lemma tertium.

Si data recta linea secetur in ratione terminorum inæqualium, & diuidendo, fiat segmentorum differentia ad minus segmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inuenta proportionalitas vel ipsa erit proportionalitas æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum diuidendo, & sic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia segmentorum segmento minori.

Esto



Esto A C ad C B, vt 9 ad 6, & A D differentia segmentorum A C, C B: erit diuidendo, 3 ad 6, vt A D. ad C B, vel ad segmentum sibi æquale, D C: Quoniam verò hæc proportio non est proportio æqualitatis, fiat D E differentia segmentorum A D, & D C; 3, differentia numerorum 6 & 3; & diuidendo, erit, vt 3 ad 3, sic D E ad A D, proportio æqualitatis.



Rursus A C sit ad C B, vt 5 ad 3; & A D segmentorum differentia; diuidendo erit, A D ad C B, seu ad sibi æquale segmentum D C, vt 2 ad 3. Et iterum diuidendo [segmentorum A D & D C, esto, differentia, E C,] 1 ad 2 vt E C ad A D seu D E; & tertiò [facta F E terminorum D E & E C differentia] diuidendo inueniemus, vt 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod &c.

Ratio Lemmatis est, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & vnitatis, semper est numerus aut vnitas, vt per se patet: & nos diuidendo, semel atque iterum, ac sæpius, demimus semper minorem terminum diuisæ proportionalitatis qui est numerus vel vnitas, de maiori termino seu numero, vtimurquè deinceps residuo tantùm [quod est eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diuisæ: at non possumus sic demendo progredi in infinitum, quia vnitates in terminis sunt finitæ, sed exhauritur tandem omnis differentia, residuumq; maioris termini proportionalitatis diuisæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua vnitas ad vnitatem, vel numerus ad sibi æqualem numerum, est vt segmentum ad aliud æquale segmentum. Quod ostendere oportebat.

Quod si ab ea proportione æqualitatis, in qua desitum est, rursus incipiamus, Dico nos componēdo gradatim, venturos per vestigia diuisionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua segmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cuius propositionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non potest, in Geometria omnia quæ diuidendo concluduntur, ex contrario conuerti

uerti posse, & componendo concludi illud ipsum, quod ponebatur ante diuisionem, vt in quinto Elementorum ostenditur. Exempli gratia, sit maius segmentum datæ rectæ ad minus, vt 2 ad 1. Igitur diuidendo 1 ad 1, est vt differentia segmentorum ad minus segmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua segmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod &c.

Lemma quartum.

SI duo qualibet producta orta sint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter se, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas B C 5 ad dignitatem E F 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas A B 3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alij in numeris demonstrarunt.

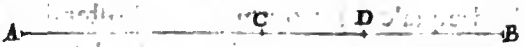
Lemma quintum.

DAtis quatuor quantitatibus proportionalibus, quarum prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis est minus producto ex medijs.

Augeatur prima donec fiant quatuor geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex medijs. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus medijs. Quod &c.

THEOREMA PRIMVM.

PRoductum in aliqua recta linea factum secundum positos terminos æquales, maximum est omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis lineæ datæ segmentis tanquam ex radicibus.



Recta linea A B secetur æqualiter in puncto C, & sit A C ad C B vt 3 ad 3 [termini æquales positi] Dico productum A C 3 in C B 3, quod fit in linea A B secundum positos terminos, esse omnium similium productorum maximum.

mum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud simile productum A D 3, in D B 3. Cum autẽ sint quatuor lineæ aritmeticè proportionales cum excessu C D, nimirum A D, A C, C B, & B D, minor est ratio maximæ A D ad A C, quàm C B ad B D; & triplicata ratio ipsius A D ad A C [seu ratio A D 3 ad A C 3] minor est, quam triplicata ipsius C B ad B D [seu C B 3 ad B D 3] & per quintum Lemma, productum ex medijs quantitatibus, A C 3, in C B 3, maius est producto A D 3 in B D 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonstratur A C 3 in C B 3 esse alio quocumque simili producto maius, & consequenter omnium similium maximum. Quod &c.

THEOREMA SECVNDVM.

SI duæ rectæ lineæ segmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per consequens, diuidendo sit, differentia segmentorum ad minus segmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ segmentorum ducta in dignitatem minoris segmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem maioris; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit A B recta linea inæqualiter secta in puncto C, & B C ad A C, vt 5 ad 3, qui sint termini positi. Producatur B A in F, donec æquetur F C ipsi C B, & A F erit differentia segmentorum B C & A C. Quoniam verò segmentum maius B C sic est ad minus C A, vt 5 est ad 3, erit diuidendo A F ad C A, vt est 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum F A 2 in A C 3, ex dignitate ipsius F A, differentiæ segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti A C. Secundum A C 3 in C B 5, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem maioris. Prima dignitas F A 2 habet pro exponente, 2, differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos positos, vt imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ F C [esse autem eiusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ A B.



Sumatur in A B alius punctus præter punctum C, & esto, D; qui accipi à nobis potest infra punctum C, vel supra. In vtroque casu, F A nequit habere eam rationem ad A C, quam habet ad A D, sed maiorem aut minorem habebit, atque

adeò F D non est secta in puncto A secundum rationem ipsius F A ad A C: fiat porrò F E ad E D, vt F A ad A C, & productum F E 2 in E D 3, per secundum Lemma, erit maximum [æquè ac productum F A 2 in A C 3] & consequenter maius simili producto F A 2 in A D 3, facto ex segmentis eiusdem rectæ F D. Quod maximum F E 2 in E D 3 habet eandem rationem ad F D 5, dignitatem sibi homogeneam, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5, vt ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur F A 2 in A D 3 [quod diximus esse minus producto F E 2 in E D 3] minorem rationem habet ad F D 5, quàm F E 2 in E D 3 ad idem F D 5, seu minorem, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5; & permutando, F A 2 in A D 3 minorem habet rationem ad F A 2 in A C 3 [seu, per Lemma quartum, A D 3 minorem habet rationem ad A C 3] quam F D 5 ad F C 5, & longè minorem, quàm C B 5 ad B D 5. Quippe sunt rectæ D B, C B, F C, & F D, aritmeticè proportionales cum excessu D C; ac propterea in primo casu, F D maxima, in secundo casu, F D minima, est ad F C in minori ratione quàm C B ad D B, & quintuplicata ratio F D ad F C, nempe ratio ipsius F D 5 ad F C 5, est minor quintuplicata ratione C B ad D B, seu C B 5 ad D B 5.

Igitur cum quatuor quantitatum, A D 3, A C 3, C B 5, & D B 5, prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum A D 3 in D B 5 factum ex duabus extremis erit minus producto A C 3 in C B 5 ex medijs. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto A C 3 in C B 5, quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo A C 3 in C B 5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea A B inæqualiter secta, quum est segmentum maius ad minus, vt numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum maius segmentum ad minus, sic numerus ad vnitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tàm similibus modò factis concluditur, vt id sibi quisque inuenire, explicare ac dilatare facillimè possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructioribus, quos huiuscemodi rerum intellectu facilium explicatione frustra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua vsum præstantissimum habentia ad inueniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra grauitatis & quadraturas, & ad alia, item multa, quæ iusto seruamus Operi: vbi dabimus nouam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas, vti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipses, &, analogiam seruando, circulos etiam infinitos. Vnde Lectoribus manifestè apparebit, de Conicis me plus multò adinuenisse, quàm ceteros, eosque ingeniosissimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolen, ellipsim, & circu-

lum

lum [figuras Conici in nostra noua serie prædicta, secundi gradus] agnouerunt: alias tertij & quarti & cæterorum non item: nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licet cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter duo præcellentes ingenio viri, Fermatius, ac Torricellius, præceptor meus, inuentorum præstantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui nouum insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quamplures Apollonij propositiones atque demonstrationes aptari sectionibus nostris & per omnia congruere, affectasque multipliciter æquationes harum sectionum ope resolui facillimè, & determinari posse. Nunc reuertor ad rem.

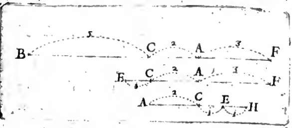
THEOREMA TERTIVM.

Data recta linea, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data productum: hoc erit maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis eiusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primum dico, productum, quale descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonstrauimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.

Esto, A B recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C, sitque B C ad C A, vt 5 ad 2. Dico productum B C 5 in C A 2 factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producatur B A in F, vt A F sit differentia segmentorũ, & diuidendo primã proportionalitatẽ,



nempe B C ad C A, vt 5 ad 2 [sicut in tertio Lemmate præscribitur] pergamus vsque dum incidamus in proportionem æqualitatis. In nostra hypotheli, primum erit, diuidendo, 3 ad 2, vt F A differentia segmentorum ad A C minus segmentũ; quam secũdam proportionalitatem exhibet secunda figura, in qua fiat C E differentia segmentorum C A, F A: per consequens erit, diuidendo, 1 ad 2, vt C E ad A C; quamquidem proportionalitatem seorsim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia segmentorum C E & A C, diuidendo erit 1 ad 1, vt E H ad E C; quæ est demum proportio æqualitatis: semper autem minus segmentum producimus vt æquemus maiori, & segmentorum differentiam constituamus.

At retrorsum viciſſim, incipiendo à recta E A tertiæ figuræ, cuius maius ſegmentum A C eſt 2, minus ſegmentum C E eſt 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum H E 1 in C E 1 eſt maximum in linea C H, per primum Theorema noſtrum, erit proinde, per ſecundum Theorema, E C 1 in C A 2 maximum in recta E A.

Deinde in recta F C ſecundæ figuræ, maius ſegmentum A F eſt 3, minus A C eſt 2, & ſegmentorum differentia E C eſt 1; porrò cum E C 1 in C A 2 ſit maximum, erit per ſecundum Theorema, etiam maximum in recta F C productum A F 3 in A C 2.

Poſtremò in linea A B primæ figuræ, productum A F 3 in A C 2 eſt maximum, vt modò oſtendimus, ergo per ſecundum Theorema eſt etiam maximum A C 2 in B C 5. Quod demonſtrandum erat.

Si loco duorum numerorum detur numerus, & vnitas, fit ſimilis constructio, & demonſtratio.

SCHOLION.

ID quod in ſecundo Theoremate ſupponebamus; data recta linea, & datis numeris, 3 & 2, maximum fore productum in ea linea factum ſecundum numeros illos datos; nunc demonſtrauimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propoſitio conditionalis, ex poſita illa hypotheſi, non abſoluta, vt patebit conſideranti.

COROLLARIVM.

SI productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumq; maximum fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt geometricè proportionales. Quippe in Theoremate oſtendimus, productum in linea factum ſecundum terminos datos eſſe omnium maximum; at productum eiuſmodi, ex 5. definitione noſtra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habet, quam dignitatum earundem radices.

PROBLEMA PRIMVM.

DAtam lineam rectam ita ſecare, vt productum ex dignitatibus ſegmentorum ſit omnium ſimilium maximum.

Sumantur exponentes duarum illarum dignitatum, rectaque diuidatur in ratione horum exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productum erit in linea data factum ſecundum terminos poſitos, nimirum ſecundum exponentes; ac proinde erit maximum per Theorema tertium.

PRO-

PROBLEMA SECVNDVM.

AEquationem determinare, in qua poteſtas quæſita radicis negatur de homogeneo ſub radice data, & dignitate ſua parodica, vt B in A-A 2||Z 2: vel B in A 3-A 4||Z 4 &c.

Oritur huiuſmodi æquatio ex dicta parodica dignitate poteſtatis negatæ ducta in B-A, differentiam datæ & quæſitæ radicis. Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, ſi primùm ducatur in A, radicem quæſitam negatam, gignet poteſtatem negatam vno gradu altiorem, quàm ſit ea parodica dignitas [vt patet ex natura multiplicationis]: deinde in + B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, ſub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta ſunt ipſa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera eſt homogeneum comparationis.

Rurſus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad poteſtatem negatam eſt eadem, ac radicis datæ ad quæſitam; ſed minor eſt poteſtas homogeneo, de quo ipſa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæſita minor eſt data; In qua proinde radice data nos recte ſumimus ſegmentum æquale radici quæſitæ A, vt alterum ſegmentum ſit B-A, differentia datæ ac quæſitæ radicis:

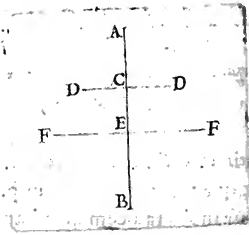
Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B-A vno radicis datæ ſegmento, ducto in alterum ſegmentum A, vel in huius poteſtatem, efficitur [per tertium Theorema] vt inde reſultans productum ſit maximum omnium ſimilium, quotieſcunque A, & B-A, ſegmenta rationem habent eam, quam exponentes ſuarum dignitatum. Sic in æquatione B in A 3-A 4||Z 4; ſi A, & B-A fuerint vt 3 ad 1, cubus ſegmenti A in B-A ductus gignet partem æquationis B in A 3-A 4; quæ eſt productum in linea data B, omnium ſimilium maximum; cuius proinde magnitudinem non poteſt vnquam excedere homogeneum comparationis, quod ſemper æquari neceſſe eſt illi alteri æquationis parti. Vnde canon pro determinanda problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum ſecundum terminos, qui ſunt exponentes eiuſdem radicis & parodicæ dignitatis, ſub quibus eſt homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non poteſt homogeneum comparationis.

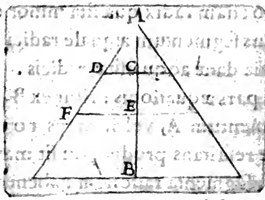
Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipſius, A, in B-A, vel in huius poteſtatem; ſemper enim eſt idem caſus tertij Theorematis noſtri, in quo productum factum in linea [ſeu data radice B] ſecundum terminos datos eſt maximum; termini verò ſunt exponentes dignitatum ſegmenti A & alterius B-A.

Sed vno vel altero exemplo dè Geometricis noſtris Opuſculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

E ſin-



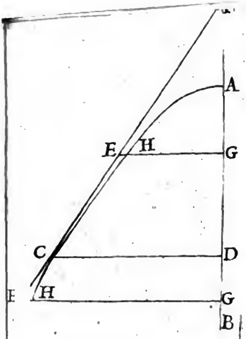
E singulis punctis datæ rectæ A B ducantur rectæ C D, E F &c. rectæ inter se parallelæ, cum data A B angulum quemcumque efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abscissarum A C, A E &c. geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere posse mox patebit) Transibit per extrema parallelarum puncta, D, F &c. perimeter figuræ, cuius diameter aut axis erit A B, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipsæ parallelæ.



Nam parallelarum abscissarumque dignitates si fuerint eiusdem gradus, exempli gratia F E 1 ad D C 1, vt A E 1 ad C A 1: vel cubi parallelarum vt cubi abscissarum, figura erit triangulum; cuius proprietas notissima est, non parallelas modò & abscissas esse geometricè proportionales, sed parallelarum & abscissarum earumdem potestates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex est rationis linearum seu radicum; ita vt cubi, & quadrato quadrata &c. abscissarum sint vt cubi, & quadrato quadrata &c. parallelarum; & illorum quoque radices geometricè proportionales.

Sin autem diuersorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abscissarum, linea descripta erit curua, habens suum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas est gradu superior dignitate abscissarum: at contra dignitas applicatarum ordinatim ad rectam [quæ curuam in vertice contingit] sumptam pro axe, gradu inferior est dignitate abscissarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Esto

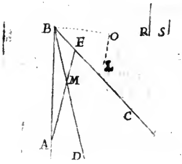


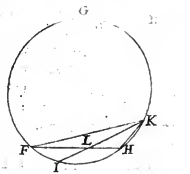
Eſto igitur A C D B vna ex præfatis figuris, ciuſque axis A B, & vertex A; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum ſit altior gradu dignitatis abſciſſarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in pūcto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, vt C D, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt conſequenter in figura parallelarum cubi vt quadrata abſciſſarum. Fiat abſciſſa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum, vt minor numerus 2 ad, 1, differentiam exponentium, ductaque F C; Dico hanc eſſe tangentem quæſitam.

Productum enim F A 1 in A D 2 in linea D F, factum ſecundum terminos poſitos 1 & 2, eſt maximum, per Theorema tertium; ſemperque homogeneum dignitati parallelarum; (cum parallelarum dignitatem exponat maior datorum numerorum, maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorum, quæ duo ſimul efficiunt numerum maiorem). Ergo ſi accipiamus alium punctum G in axe ſupra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam G H, quæ ſecet in E rectam F C (vbi opus fuerit productam); productum F A 1 in A G 2 non erit maximum in linea F G, quale eſt F A 1 in A D 2 in recta F D; propterea quod maior eſt vel minor ratio ipſius F A ad A G, quàm ad A D, & conſequenter F G, F D non ſunt proportionaliter diuiſæ. Ergo maiorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F D 3 ſibi homogeneum, quàm F A 1 in A G 2 ad F G 3, & permutando, maiorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F A 1 in A G 2, (vel ex lemmate quarto, A D 2 ad A G 2) quàm F D 3 ad F G 3. Sed A D 2 ad A G 2 ponitur in figura; vt C D 3 ad H G 3; F D 3 ad F G 3, ob ſimilitudinem triangulorum, vt C D 3 ad E G 3. Ergo maiorem rationem habet C D 3 ad H G 3, quàm C D 3 ad E G 3; & conſequenter C D maiorem rationem habet ad H G, quàm ad E G, ac proinde H G recta eſt minor quàm E G, & punctus E cadit extra datam curuam A H C H. Eodem pacto de ſingulis punctis ductæ lineæ F C demonſtratur illos cadere ſemper extrà curuam. Ergo F C eſt illius tangens. Quod &c.

9. Hæ ſunt parabolæ, vt vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datum punctum duci poſſint, oſtendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc neceſſarium Lemma.

Lemma ~~*quin*~~ Sex*tum*.





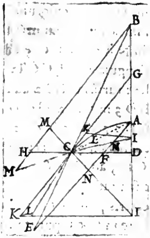
Dato angulo A B C vtcumque secto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C subtendat & à recta B D secetur in data ratione R ad S.

Fiat H G F segmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde vt R ad S, ita fiat F L ad L H; vt angulus A B D ad E B D, sic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur vsque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A secet B D in M & B A in puncto A. Dico rectam E A esse quæsitam, quæ à B D in M diuiditur in ratione data.

Siquidem anguli H & E: K & B sunt æquales, & hi secti proportionaliter [per trigesimamtertiam sexti Elemẽtorum] à K L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E sunt æquiangula, & A E ad E B, vt H F ad H K. Rursus æquiangula fecimus triangula M B E, L K H, & consequenter E B est ad E M, vt H K ad H L, & ex æqualitate ordinata A E ad E M, vt H F ad H L, & diuidendo F L ad L H [seu R ad S] vt A M ad M E. Quod &c.

Quod si punctus datus sit extra, vt in O, ducemus B O rectam [punctus autem O sic detur oportet, vt O B recta cum A B angulum faciat, nec sit ad lineam posita] & faciemus angulum ~~A~~ B O L ~~pro dato, sectum à recta B D~~ æqualem differentiæ ang. EBO et H, et OL ducta satisfaciet problemati.

Sit



Sit hyperbole A C L, cuius diameter A B, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abscissæ ducta in dignitatem abscissæ & diametri, ex quibus vna recta conflata intelligatur. Exempli gratia, quadrato cubi ordinatarum, hoc est L I 5 ad C D 5, sint, vt producta B I 3 in A I 2 ad B D 3 in A D 2, genita ex quadratis abscissarum A I, A D, & cubis rectarum B I, B D, quippe quas efficiunt eædem abscissæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda sit tangens, & ordinatim applicetur C D. Porrò ducatur B C, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti, A E [secans C D in F, & in F item secta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta B I 3 in A I 2, & B D 3 in A D 2, subtendens angulum E C A] : & tandem G C parallela rectæ A E, occurrens ipsi A B in G. Dico tangentem quæsitam esse C G.

Sumatur in C G alius punctus K supra & infra C, & , ordinatim applicatis K I secantibus hyperbolen in L, ab I puncto ~~inferiori~~ ducatur I C incidens in rectam H B in puncto M, & secans A E in N; quæ HB ipsi AE parallela occurret DC productę in H.

Quoniam verò A E secatur in F in ratione 2 ad 3, F A 2 in F E 3, per tertium Theorema, est productum maximum, & ratio F E 3 ad N E 3, seu H B 3 ad M B 3 [propter similitudinem triangulorum H C B, E C F: M B C, C E N] maior est ratione N A 2 ad A F 2. Ergo per Lemma quintum maius est H B 3 in A F 2 ipso M B 3 in N A 2; quę duo producta si comparentur cum C G 5, primū habebit maiorem rationem ad C G 5, quàm secundum. Sed ratio primi, quod est H B 3 in A F 2, ad C G 5 eadem est ac ratio B D 3 in A D 2 ad G D 5 [cum H B ad C G sit

vt

vt B D ad G D, ob ſimilitudinem triangulorum H B D, C G D; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi:tùm C G 2 ad A F 2, vt G D 2 ad A D 2]: ratio ſecundi, ſeu M B 3 in N A 2, ad C G 5 eſt eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia ſimilia ſunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G rectæ earumque cubi proportionales: rurſùs vt G I 2 ad I A 2, ſic C G 2 ad A N 2] Ergo maiorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando, B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [ſeu ex natura hyperboles, C D 5 ad L I 5] maiorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, ſeu [ob ſimilitudinem triãgulorũ K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimã quinti Elem. dignitas, L I 5 minor eſt, quàm K I 5, & ſua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K eſt extra curuam. Sic de ceteris punctis oſtendetur cadere extra curuam, atque adeò C G hyperbolen tangere in ſolo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonſtratio etiam ad ellipſes, & circulos accommodari poteſt.

Iàm verò quàm latè pateat vſus noſtri Theorematis tertij, ex propoſitis exemplis licet intelligere; nec ita multum diſſimili aut difficiliori via centra grauitatis, & quadraturas, quorum problematum pauló ante meminimus, inuenimus. Interim, ſi quis Apollonij conſtructionẽ atque demonſtrationẽ trigeſimæ quartæ propoſitionis primi Conicorum libri cum noſtris comparabit, nonnihil fortaſſe proficiet in arte dilatandi propoſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare

LAVS DEO.